



TITLE:

# N-Tournamentの定義可能性と量記号の消去 (数理論理とモデル理論)

AUTHOR(S):

本橋, 信義

---

CITATION:

本橋, 信義. N-Tournamentの定義可能性と量記号の消去 (数理論理とモデル理論). 数理解析研究所講究録 1973, 180: 60-64

ISSUE DATE:

1973-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107131>

RIGHT:

# $n$ -tournament の定義可能性 と量記号の消去

学習院大 本 橋 信 義

$X$  を無限集合,  $n$  を正の整数とすると  $X^{[n]}$  で  $X$  の相異なる  $n$  個の元からなる集合全体をあらわす。  $X^{[n]}$  の元の表示を見やすくするために前もって linear order  $<$  が  $X$  の上に与えられているものとし,  $X^{[n]}$  の元は  $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle, x_1 < x_2 < \dots < x_n$  の形であらわされているものとする。  $S_n$  で  $\{1, 2, \dots, n\}$  の上の permutation 全体の集合をあらわす。  $X$  上の  $n$ -ary relation  $R$  について,

$R$  is connected over  $X \iff$  For any  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in X^{[n]}$   
there is a  $\sigma \in S_n$  such that  $\langle x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)} \rangle \in R$

$R$  is antisymmetric  $\overline{X} \iff$  For any  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in X^{[n]}$   
there is a  $\sigma \in S_n$  such that  $\langle x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)} \rangle \notin R$

と定義する (Ehrenfeucht [2] による)。  $A$  を無限集合,  $R$  を  $A$  の上の  $n$ -ary relation とするとき  $R$  が  $A$  の上の  $n$ -tournament であるとは、  $A$  の無限部分集合  $X$  が存在して

$R$  を  $X$  の上に制限すると  $R$  が *connected and antisymmetric over  $X$*  となることと定義する (Baumgartner [1] による)。従って無限集合上の linear order は 2-tournament であり、1-tournament は存在しないことになる。この  $n$ -tournament について良く知られた結果として Ehrenfeucht [2] の

- (I) { First order theory  $T$  が非可算濃度で categorical  
 ならば、いかなる  $n$ -tournament も  $T$  の model の中では  
 定義できない。

がある。この定義の結論は theory  $T$  が *totally transcendental* な場合にも成り立つことが Morley によって示されている。

([4] 参照)。本講演では、まず次の二つの事実を示す。

$R, R_1, \dots, R_k$  を無限集合  $A$  上の  $n$ -ary relations とする。 $1 \leq i < j \leq n$  に対して  $R_j^i$  は  $R$  の  $i$  成分と  $j$  成分を入れかえてできる relation とする。すると

- (II) {  
 イ)  $R$  が  $n$ -tournament  $\Rightarrow A^n - R$  も  $n$ -tournament.  
 ロ)  $R_1 \cup \dots \cup R_k$  が  $n$ -tournament  $\Rightarrow$  ある  $1 \leq i \leq k$  について、 $R_i$  が  $n$ -tournament.  
 ハ)  $R_1, \dots, R_k$  が  $n$ -tournament  $\Rightarrow$  ある  $1 \leq i \leq k$  について、 $R_i$  が  $n$ -tournament.  
 ニ)  $R$  が  $n$ -tournament  $\Rightarrow R_j^i$  も  $n$ -tournament.  
 ホ)  $R \times A$  が  $(n+1)$ -tournament  $\Rightarrow R$  は  $n$ -tournament

- (III)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Unary functions と unary relations しかもたない} \\ \text{first order structure 中ではいかなる } n\text{-tournament} \\ \text{も open formula では定義できない。} \end{array} \right.$

この二つの事実から、我々は、

- (IV)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Unary functions と unary relations しかもたない} \\ \text{first order structure 中である } n\text{-tournament} \\ \text{が定義できたとすれば、その structure は量記号の} \\ \text{消去を許さない。} \end{array} \right.$

を得る。McNaughton [5] によると  $\text{structure } \langle A, f, U \rangle_{\mathcal{L}A}$ ,  
ここで  $A$  は無限集合,  $f$  は  $A$  の上の unary function,  $\mathcal{L}$  は量記  
号の消去を許すことかわかるから、

- (V)  $\left\{ \begin{array}{l} \langle A, f, U \rangle_{\mathcal{L}A} \text{ 中ではいかなる } n\text{-tournament も} \\ \text{定義できない。} \end{array} \right.$

が得られる。(V) を筆者は上記のような考察から得たので  
あるが、この結果は既に Baumgartner によって Notice of A.M.S.  
に発表されていた。([1] 参照)。(V) から我々は、 $\omega$  を  
自然数全体とすると

(VI)  $\langle \omega, f, U \rangle_{\mathcal{L}\omega}$  の中で通常の大-小関係は定義できない。  
を得る。これを用いると McNaughton の結果

(VII)  $\langle \omega, f, U \rangle_{\mathcal{L}\omega}$  の中で加法は定義できない。  
が得られる。一方 Hartig [3] によると

(VII)  $\left\{ \begin{array}{l} \omega \text{ の上の 2 つの unary functions } f, g \text{ をうまく取} \\ \text{ると, } \langle \omega, f, g \rangle \text{ の中で加法と乗法が共に定義できる。} \end{array} \right.$

が成り立つから (VII) はある意味で最良の結果だと言える。

以上が  $n$ -tournament について筆者の予許にある事実のすべてである。最後に、linear order と unary relations をもった structure についての次のような予想を提出して本講演を終えたいと思う。

(IX)  $\left\{ \begin{array}{l} A \text{ を無限集合, } < \text{ を } A \text{ 上の linear order, } f \text{ を } A^2 \text{ から} \\ A \text{ への bijection とするとき, } f \text{ は } \langle A, <, \cup \rangle_{\cup \subseteq A} \\ \text{の中では定義できない。} \end{array} \right.$

この予想 (IX) が、教育大の江田君や、埼玉大の花沢君達から研究している。

(X)  $\left\{ \begin{array}{l} K \text{ を infinite cardinal, } < \text{ をその上の通常の order と} \\ \text{するとき, } K^2 \text{ から } K \text{ への camonical bijection は} \\ \langle K, <, \cup \rangle_{\cup \subseteq K} \text{ の中では定義出来るか?} \end{array} \right.$

という問題を special case として含むことは明らかである。

## References

- [1] J.E. Baumgartner, Undefinability of  $n$ -ary relations from unary functions, *Notice of A.M.S.*
- [2] A. Ekrenfencht, On theories categorical in power, *Fund. Math.*, 44 (1957), 241-248.
- [3] K. Hartig, Einstellige Funktionen als Grundbegriffe der elementaren Zahlentheorie, *Z. Math. Logic. Grundlagen Math.* 5 (1959), 209-215.
- [4] M. Morley, Categoricity in powers, *Trans. A.M.S.*, 114 (1965), 514-538.
- [5] R. McNaughton, Undefinability of addition from one unary operation, *Trans. A.M.S.*, 117 (1965), 329-337.